Das Integral Problem
aus der BYTE 12 1986 (Seite 113-122)

Mirko Junge

21. Februar 2000

Im Folgenden wird ein einfach aussehendes uneigentliches Integral vorgestellt, dessen Lösung nicht ganz so einfach ist. Entnommen ist es der Byte 12/1986 Seite 113–122, wo es um numerische Approximation von Integralen ging.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

So harmlos dieses Integral auch aussehen mag, es hat es in sich!
Viel Spaß beim Lösen und kein Mogeln

Zuerst versucht man das uneigentliche Integral in eins mit endlichen Grenzen umzuformen:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^4+x^2+1}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$$

Mit Hilfe der Substitution $u = \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = -u^{-2}$ erhält man

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4+x^2+1}dx + \int_1^0 \frac{-u^{-2}}{u^{-4}+u^{-2}+1}du$$

Erweitern mit $\frac{u^4}{u^4}$ liefert

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4+x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{u^2}{u^4+u^2+1}du = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$$

Der Quotient sieht so aus, als das man ihn mittels Partialbruchzerlegung vereinfachen könnte: Also sucht man die Nullstellen des Nenners:

$$x^4+x^2+1 = u^2+u+1 = 0, \quad u = x^2$$

Die Formel für die quadratische Gleichung liefert:

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Hieraus folgt für x:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Es existieren also zwei konjugiert komplexe Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Es muß somit die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{P_1x+Q_1}{(x-x_1)(x-x_2)} + \frac{P_2x+Q_2}{(x-x_3)(x-x_4)}$$

Aus der obigen Nullstellenbestimmung weiß man:

$$x^4+x^2+1 = (x-x_1)(x-x_2)\cdot(x-x_3)(x-x_4)$$

Somit folgt

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{P_1x+Q_1}{(x-x_1)(x-x_2)} + \frac{P_2x+Q_2}{(x-x_3)(x-x_4)} \iff$$

$$x^2+1 = (P_1x+Q_1)\cdot(x-x_3)(x-x_4) + (P_2x+Q_2)\cdot(x-x_1)(x-x_2)$$

Durch Einsetzen der Werte für x_1, x_2, x_3 und x_4 erhält man

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2+x+1, \quad (x-x_3)(x-x_4) = x^2-x+1$$

Somit ergibt sich für die Gleichung:

$$x^2+1 = (P_1x+Q_1)\cdot(x^2-x+1) + (P_2x+Q_2)\cdot(x^2+x+1)$$

Durch Ausmultiplizieren und Umsortieren erhält man:

$$x^2+1 = (P_1x^3 - P_1x^2 + P_1x + Q_1x^2 - Q_1x + Q_1) + (P_2x^3 + P_2x^2 + P_2x + Q_2x^2 - Q_2x + Q_2) \iff$$

$$x^2+1 = x^3(P_1+P_2) + x^2(-P_1+P_2+Q_1+Q_2) + x(P_1+P_2-Q_1+Q_2) + (Q_1+Q_2)$$

Diese Gleichung löst man mittels Koeffizientenvergleich und erhält ein inhomogenes Gleichungssystem der Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

$$P_1+P_2 = 0, \quad P_1+P_2-Q_1+Q_2 = 0, \quad Q_1+Q_2 = 1, \quad Q_1+Q_2-P_1+P_2 = 1$$

Vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Die Lösung lautet also:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad Q_1 = \frac{1}{2}, \quad Q_2 = \frac{1}{2}$$

Somit erhält man für das Integral:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx$$

Man weiß:

$$\int \frac{1}{a+bx+cx^2}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right); \quad 4ac-b^2 > 0$$

Also

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{4-1}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{4-1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right); \quad 4-1=3>0$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{4-1}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{4-1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right); \quad 4-1=3>0$$

Somit läßt sich scheiben:

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 + (\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{3\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

Also

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$