Wilcoxon's Signed-Rank Distribution

Mirko Junge
http://www.geocities.com/junge_m

Voraussetzungen zur Anwendung[4][6][7]

Betrachtet werden die n' abhängigen Stichproben aus einer stetigen Grundgesamtheit. Die Einzelwerte $x_{i,1}$ und $x_{i,2}$, $(i = 1, 2, \ldots, n')$ gehören aus sachlichen Gründen paarweise zusammen. Bezeichne n die Zahl der reduzierten Stichproben, also diejenigen für die

$$d_i = x_{1,i} - x_{2,i} \neq 0 \tag{1}$$

gilt. Der Test für die reduzierte Stichprobe ist statistisch stärker als der Test für $\sum_{d_i>0} 1 + \frac{1}{2} \sum_{d_i=0} 1$, also der für die Originalstichprobe, da die kritische Region des Tests für die Originalstichprobe eine Teilmenge des Tests für die reduzierte Stichprobe ist [3].
Ist der reduzierte Stichprobenumfang nicht ausreichend, so kann bei gegebenen α keine Aussage bezüglich der Nullhypothese getroffen werden; in diesen Fällen steht in der nachfolgenden Tabelle ein '–'.

Vorgehensweise [1, S. 104f][2, S. 194f]

Für jedes Wertepaar des reduzierten Stichprobenumfanges wird die Differenz

$$d_i = x_{i,1} - x_{i,2}, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{2}$$

gebildet, Paare mit gleichen Einzelwerten werden also fortgelassen.
Die Beträge $|\,d_i\,|$ der so erhaltenen n von Null verschiedenen Differenzen d_i werden in eine Rangfolge gebracht, d.h. sie werden der Größe nach geordnet und ausgehend vom kleinsten Betrag mit den Rangzahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ versehen. Sind die nach Größe geordneten Beträge v bis $(v+c)$ gleich, dann erhält jeder dieser $(c+1)$ Beträge die Rangzahl $v + c/2$. Zu jeder Rangzahl wird vermerkt, ob die zugehörige Differenz positiv oder negativ ist.
Man bildet die Summe W^+ der zu positiven Differenzen gehörenden Rangzahlen und die Summe W^- der zu negativen Differenzen gehörenden Rangzahlen:

$$W^+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{d_i}{|\,d_i\,|} + 1\right) \mathrm{Rank}[d_i] \tag{3}$$

$$W^- = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}\left(\frac{d_i}{|\,d_i\,|} - 1\right) \mathrm{Rank}[d_i] \tag{4}$$

Hierbei bezeichnet 'Rank$[d_i]$' die Rangzahl der Differenz d_i.

Als Kontrolle kann man die Beziehung

$$W^+ + W^- = \frac{n\,(n+1)}{2} \tag{5}$$

benutzen.

Testen der Hypothesen

Hypothese H_1: Die beiden Stichproben stammen aus der gleichen Grundgesamtheit: $F_1(x) = F_2(x)$.

Gegenhypothese	Verwerfen der Hypothese $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ für		
	Prüfgröße		Schwellenwert
$F_1(x) > F_2(x)$	$W^+ = \frac{n\,(n+1)}{2} - W^-$	$\leq$	$W[\alpha, n]$
$F_1(x) < F_2(x)$	$W^- = \frac{n\,(n+1)}{2} - W^+$	$\leq$	$W[\alpha, n]$
$F_1(x) \neq F_2(x)$	$W^{\min} = \min[W^+, W^-]$	$\leq$	$W[\alpha/2, n]$

Die Tabelle

Die in der Tabelle dargestellte Funktion $W[\alpha, n]$ beschreibt die unteren Grenzen für W^+ bei einem reduzierten Stichprobenumfang von n und einem Signifikanzniveau von P, bei dem der Wilcoxon Vorzeichen-Rangfolge-Test noch trennt, die Nullhypothese also verworfen werden muß.
Die tabulierte Funktion $W[\alpha, n]$ ist das größte W, so daß $Pr(W^+ \leq W) \leq \alpha$. Ein Strich ('–') zeigt an, daß es kein Wert der Rangzahlsumme gibt, die die geforderten Bedingung erfüllt.
W^- beschreibt die Summe der Rangzahlen bei denen die Differenz d_i negativ ist. Sie besitzt die gleiche Verteilung wie W^+ mit einem Mittelwert

$$\mu = \frac{1}{2}\,(W^+ + W^-) = \frac{1}{4}\,n(n+1) \tag{6}$$

und einer Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\,n(n+1)(n+\frac{1}{2}) \tag{7}$$

Für große Werte von n, z.B. $n > 25$, ist W^+ angenähert normalverteilt [1, S. 105][2, S. 195][5] mit

$$W[\alpha, n] = \frac{n\,(n+1)}{4} - u_{(1-\alpha)}\sqrt{\frac{1}{24}\,n(n+1)(2n+1)} \tag{8}$$

wobei

$$N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{t^2/2}\,dt \tag{9}$$

Beispiel

Das Gesichtsfeld eines Patienten werde durch das Sehen oder Nichtsehen von 32 einzelnen Punkten beschrieben. Man vergleiche das Gesichtsfeld vor und nach einer den Schielwinkel korrigierenden Augenoperation.

Gesichtsfeldpunkte		Sign	d_i	Rang
vorher	nachher			
6	6		0	—
6	16		10	10
14	17		3	5.5
16	19		3	5.5
9	9		0	—
13	16		3	5.5
9	15		6	9
14	18		4	8
3	5		2	2
29	32		3	5.5
21	21		0	—
9	7	–	2	2
14	12	–	2	2
3	3		0	—

Mit Hilfe der Rang-Tabelle bestimmt man den Umfang der reduzierten Stichprobe zu $n = 10$ und berechnet man leicht: $W^+ = 51$ und $W^- = 4$.
Es soll die Hypothese 'die beiden Stichproben stammen aus der gleichen Grundgesamtheit' gegen die Hypothese 'der Mittelwert der Grundgesamtheit der Gruppe der Operierten ist größer als die der Grundgesamtheit vor der Operation'. Es wird also der maximale Wert von α gesucht, für den $W[\alpha, 10]$ kleinergleich W^- ist, also

$$\max\{\alpha | W^- \geq W[\alpha, 10]\} \tag{10}$$

Aus der Tabelle für die Verteilung der Wilcoxon's Signed-Rank Distribution[1] $W[\alpha, n]$ erhält man für $n = 10$ die Werte:

	α						
n	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
10	14	10	8	5	3	1	0

Die Hypothese daß die Stichproben aus der gleichen Grundgesamtheit stammen kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 0.01$ verworfen werden.

[1] Eine umfassende Tabelle befindet sich im Anhang, sowie bei Lindley [4] als auch bei Wilcoxon [6, S. 28ff] und [7] in Verbindung mit [5].

Literatur

[1] Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik
Graf, U.; Henning, H.-J.; Stange, K.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
2. Auflage, 1966

[2] Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik
Graf, U.; Henning, H.-J.; Stange, K.; Willrich, P.-Th.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo
3. Auflage, 1987

[3] A Theorem on the Sign Test when Ties are present
Hemelrijk, J.
Indagationes math. 14
Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 55, Seite 322-326

[4] New Cambridge Elementary Statistic Table
Lindley; Scott
Cambridge University Press, 1984

[5] Critical Values for the Wilcoxon Signed Rank Statistic
Mitic, Peter
The Mathematica Journal Vol. 6(1996), No. 3,S. 73-77

[6] Some Rapid Approximate Statistical Procedures
Wilcoxon, F.; Wilcox, R.A.
American Cyanamid Company, 1964, S. 28

[7] Critical Values and Probability Levels for the Wilcoxon Rank Sum Test and the Wilcoxon Signed Rank Test
Wilcoxon, Frank; Katti, S.K.; Wilcox, Roberta A.
in: Selected Tables in Mathematical Statistics (Volume 1) Harter, H.L.; Owen, D.B.
American Mathematical Society, Providence, Rode Island 1973

Wilcoxon's Signed-Rank Distribution

$W[\alpha, n]$

	α						
n	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
1	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	–	–	–
4	0	–	–	–	–	–	–
5	2	0	–	–	–	–	–
6	3	2	0	–	–	–	–
7	5	3	2	0	–	–	–
8	8	5	3	1	0	–	–
9	10	8	5	3	1	0	–
10	14	10	8	5	3	1	0
11	17	13	10	7	5	3	1
12	21	17	13	9	7	5	2
13	26	21	17	12	9	7	4
14	31	25	21	15	12	9	6
15	36	30	25	19	15	12	8
16	42	35	29	23	19	15	11
17	48	41	34	27	23	19	14
18	55	47	40	32	27	23	18
19	62	53	46	37	32	27	21
20	69	60	52	43	37	32	26
21	77	67	58	49	42	37	30
22	86	75	65	55	48	42	35
23	94	83	73	62	54	48	40
24	104	91	81	69	61	54	45
25	113	100	89	76	68	60	51
26	124	110	98	84	75	67	58
27	134	119	107	92	83	74	64
28	145	130	116	101	91	82	71
29	157	140	126	110	100	90	79
30	169	151	137	120	109	98	86
31	181	163	147	130	118	107	94
32	194	175	159	140	128	116	103
33	207	187	170	151	138	126	112
34	221	200	182	162	148	136	121
35	235	213	195	173	159	146	131
36	250	227	208	185	171	157	141
37	265	241	221	198	182	168	151
38	281	256	235	211	194	180	162
39	297	271	249	224	207	192	173
40	313	286	264	238	220	204	185
41	330	302	279	252	233	217	197
42	348	319	294	266	247	230	209
43	365	336	310	281	261	244	222
44	384	353	327	296	276	258	235
45	402	371	343	312	291	272	249
46	422	389	361	328	307	287	263
47	441	407	378	345	322	302	277
48	462	426	396	362	339	318	292
49	482	446	415	379	355	334	307
50	503	466	434	397	373	350	323
51	525	486	453	416	390	367	339
52	547	507	473	434	408	384	355
53	569	529	494	454	427	402	372
54	592	550	514	473	445	420	389
55	615	573	536	493	465	439	407
56	639	595	557	514	484	457	425
57	664	618	579	535	504	477	443
58	688	642	602	556	525	497	462
59	714	666	625	578	546	517	482
60	739	690	648	600	567	537	501
61	765	715	672	623	589	558	521
62	792	741	697	646	611	580	542
63	819	767	721	669	634	602	563
64	847	793	747	693	657	624	584
65	875	820	772	718	681	647	606
66	903	847	798	742	705	670	628
67	932	875	825	768	729	694	651
68	962	903	852	793	754	718	674
69	992	931	879	819	779	742	697
70	1022	960	907	846	805	767	721
71	1053	990	936	873	831	792	745
72	1084	1020	964	901	858	818	770
73	1116	1050	994	928	884	844	795
74	1148	1081	1023	957	912	871	821
75	1181	1112	1053	986	940	898	847
76	1214	1144	1084	1015	968	925	873
77	1247	1176	1115	1044	997	953	900
78	1282	1209	1147	1075	1026	981	927
79	1316	1242	1179	1105	1056	1010	955
80	1351	1276	1211	1136	1086	1039	983
81	1387	1310	1244	1168	1116	1069	1011
82	1423	1345	1277	1200	1147	1099	1040
83	1459	1380	1311	1232	1178	1129	1070
84	1496	1415	1345	1265	1210	1160	1099
85	1533	1451	1380	1298	1242	1191	1130
86	1571	1487	1415	1332	1275	1223	1160
87	1609	1524	1451	1366	1308	1255	1191
88	1648	1561	1487	1400	1342	1288	1223
89	1688	1599	1523	1435	1376	1321	1255
90	1727	1638	1560	1471	1410	1355	1287
91	1767	1676	1597	1507	1445	1389	1320
92	1808	1715	1635	1543	1480	1423	1353
93	1849	1755	1674	1580	1516	1458	1387
94	1891	1795	1712	1617	1552	1493	1421
95	1933	1836	1752	1655	1589	1529	1455
96	1976	1877	1791	1693	1626	1565	1490
97	2019	1918	1832	1731	1664	1601	1525
98	2062	1960	1872	1770	1702	1638	1561
99	2106	2003	1913	1810	1740	1676	1598
100	2151	2045	1955	1850	1779	1714	1634

	α						
n	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
101	2195	2089	1997	1890	1818	1752	1671
102	2241	2133	2039	1931	1858	1791	1709
103	2287	2177	2082	1972	1898	1830	1747
104	2333	2222	2125	2014	1939	1870	1785
105	2380	2267	2169	2056	1980	1910	1824
106	2427	2312	2213	2099	2022	1950	1863
107	2475	2359	2258	2142	2063	1991	1903
108	2523	2405	2303	2186	2106	2032	1943
109	2572	2452	2349	2230	2149	2074	1984
110	2621	2500	2395	2274	2192	2117	2025
111	2671	2548	2442	2319	2236	2159	2066
112	2721	2596	2489	2364	2280	2202	2108
113	2771	2645	2536	2410	2325	2246	2150
114	2822	2695	2584	2456	2370	2290	2193
115	2874	2744	2632	2503	2415	2335	2236
116	2926	2795	2681	2550	2461	2380	2280
117	2978	2846	2731	2598	2508	2425	2324
118	3031	2897	2780	2646	2555	2471	2368
119	3085	2948	2831	2694	2602	2517	2413
120	3139	3001	2881	2743	2650	2564	2459
121	3193	3053	2933	2793	2698	2611	2505
122	3248	3106	2984	2843	2747	2658	2551
123	3303	3160	3036	2893	2796	2707	2598
124	3359	3214	3089	2944	2846	2755	2645
125	3416	3269	3142	2995	2896	2804	2692
126	3472	3324	3195	3047	2946	2853	2740
127	3530	3379	3249	3099	2997	2903	2789
128	3587	3435	3304	3152	3049	2953	2838
129	3645	3492	3359	3205	3100	3004	2887
130	3704	3548	3414	3258	3153	3055	2937
131	3763	3606	3470	3312	3205	3107	2987
132	3823	3664	3526	3367	3259	3159	3038
133	3883	3722	3583	3421	3312	3212	3089
134	3944	3781	3640	3477	3366	3264	3140
135	4005	3840	3697	3533	3421	3318	3192
136	4066	3900	3756	3589	3476	3372	3245
137	4128	3960	3814	3646	3531	3426	3298
138	4191	4020	3873	3703	3587	3481	3351
139	4254	4081	3933	3760	3644	3536	3405
140	4317	4143	3993	3819	3701	3592	3459
141	4381	4205	4053	3877	3758	3648	3514
142	4445	4268	4114	3936	3816	3704	3569
143	4510	4331	4175	3996	3874	3761	3624
144	4575	4394	4237	4055	3932	3819	3680
145	4641	4458	4299	4116	3991	3877	3737
146	4708	4522	4362	4177	4051	3935	3793
147	4774	4587	4425	4238	4111	3994	3851
148	4842	4652	4489	4300	4171	4053	3908
149	4909	4718	4553	4362	4232	4113	3967
150	4978	4785	4618	4425	4294	4173	4025
151	5046	4851	4683	4488	4355	4233	4084
152	5115	4919	4748	4551	4418	4294	4144
153	5185	4986	4814	4615	4480	4356	4204
154	5255	5054	4881	4680	4544	4418	4264
155	5326	5123	4948	4745	4607	4480	4325
156	5397	5192	5015	4810	4671	4543	4387
157	5468	5262	5083	4876	4736	4606	4448
158	5540	5332	5151	4943	4801	4670	4511
159	5613	5402	5220	5009	4866	4734	4573
160	5686	5473	5289	5077	4932	4799	4636
161	5759	5545	5359	5144	4999	4864	4700
162	5833	5617	5429	5213	5065	4930	4764
163	5908	5689	5500	5281	5133	4996	4828
164	5982	5762	5571	5350	5200	5062	4893
165	6058	5835	5643	5420	5269	5129	4959
166	6134	5909	5715	5490	5337	5196	5024
167	6210	5983	5787	5560	5406	5264	5091
168	6287	6058	5860	5631	5476	5332	5157
169	6364	6133	5934	5703	5546	5401	5224
170	6442	6209	6008	5775	5616	5470	5292
171	6520	6285	6082	5847	5687	5540	5360
172	6599	6362	6157	5920	5759	5610	5429
173	6678	6439	6232	5993	5831	5681	5497
174	6758	6517	6308	6067	5903	5752	5567
175	6838	6595	6385	6141	5976	5823	5637
176	6919	6673	6461	6216	6049	5895	5707
177	7000	6752	6538	6291	6123	5967	5778
178	7081	6832	6616	6366	6197	6040	5849
179	7163	6912	6694	6442	6271	6113	5921
180	7246	6992	6773	6519	6346	6187	5993
181	7329	7073	6852	6596	6422	6261	6065
182	7412	7155	6932	6673	6498	6336	6138
183	7496	7236	7012	6751	6574	6411	6212
184	7581	7319	7092	6829	6651	6486	6285
185	7666	7402	7173	6908	6728	6562	6360
186	7751	7485	7254	6987	6806	6639	6435
187	7837	7569	7336	7067	6884	6716	6510
188	7924	7653	7419	7147	6963	6793	6585
189	8010	7738	7502	7228	7042	6871	6662
190	8098	7823	7585	7309	7122	6949	6738
191	8186	7908	7669	7391	7202	7028	6815
192	8274	7995	7753	7473	7283	7107	6893
193	8363	8081	7838	7555	7364	7187	6971
194	8452	8168	7923	7638	7445	7267	7049
195	8542	8256	8008	7722	7527	7347	7128
196	8632	8344	8095	7806	7610	7428	7207
197	8723	8432	8181	7890	7692	7510	7287
198	8814	8521	8268	7975	7776	7592	7367
199	8905	8611	8356	8060	7859	7674	7448
200	8998	8701	8444	8146	7944	7757	7529